



پیشنهاد یک روش بدون مش برداری جدید با روابط صریح به منظور بهبود پایداری روش بدون مش برداری متداول

شیدا شمس

کارشناس ارشد مهندسی مخابرات میدان، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه یزد
sh.shams70@gmail.com

علی غفورزاده یزدی

استادیار دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه یزد
aghafoorzadeh@yazd.ac.ir

مسعود موحدی

دانشیار دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه یزد
movahhedi@yazd.ac.ir

چکیده

روش‌های عددی بدون مش در تحلیل مسائل الکترومغناطیس از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. کارآمدی این روش‌ها در مدل سازی دامنه مسائل تنها با استفاده از مجموعه‌ای از گره‌ها و بدون نیاز به اطلاعاتی در مورد ارتباط بین آنها، این روش‌ها را بسیار مورد توجه قرار داده است. اخیراً روش بدون مش مبتنی بر توابع پایه برداری یا روش بدون مش برداری در تحلیل مسائل الکترومغناطیس حوزه زمان بکار گرفته شده است. روش بدون مش برداری را می‌توان روشی کارآمد در تحلیل مسائل الکترومغناطیس حوزه زمان دانست که علاوه بر دارا بودن محاسن روش بدون مش متداول به دلیل برخورداری از ویژگی بدون دیورژانس بودن از دقت بالاتری نیز برخوردار است. در این مقاله یک رابطه صریح جدید برای روش بدون مش برداری پیشنهاد می‌شود که با بکارگیری آن می‌توان پایداری روش بدون مش برداری را بهبود بخشید. همچنین روش پیشنهادی در این مقاله به دلیل خاصیت بدون دیورژانس بودن از دقت بالاتری نیز برخوردار است. در این مقاله ویژگی و کارآمدی روش پیشنهادی با ذکر مثال عددی مورد بررسی قرار گرفته است.

واژگان کلیدی: روش بدون مش، روش بدون مش برداری، رابطه صریح، ویژگی بدون دیورژانس بودن



مقدمه

در دهه‌های اخیر روش‌های بدون مش در تحلیل مسائل الکترومغناطیس حوزه زمان بسیار مورد توجه قرار گرفته و گسترش یافته‌اند. از جمله این روش‌ها، روش EFG (Cingoski et al, 1998)، روش MLSRKM (Viana and Mesquita, 1999) و RPIM (Kaufman et al, 2008) هستند. از میان روش‌های بدون مش، روش بدون مش مبتنی بر توابع پایه شعاعی اسکالر یکی از روش‌های درون‌یابی قدرتمند برای شبیه‌سازی مسائل الکترومغناطیس حوزه زمان به شمار می‌رود (Lai et al, 2008). روش بدون مش مبتنی بر توابع پایه شعاعی اسکالر را می‌توان برای حل عددی معادلات ماکسول در مسائل یک، دو و سه بعدی بکار گرفت. در این روش معادلات حاکم بر مسائل با استفاده از گره‌های پراکنده شده در دامنه و مرز مسئله بدست می‌آیند و گره‌ها در این حالت یک مش را تشکیل نمی‌دهند. به این ترتیب نیازی به دانستن ارتباط بین گره‌ها وجود ندارد. نتایج حاصل از پژوهش‌ها نشان می‌دهند که می‌توان از روش‌های بدون مش به ویژه روش‌هایی با توابع پایه شعاعی، بصورت مؤثری در تحلیل مسائل الکترومغناطیس استفاده کرد اما جواب‌های حاصل از این روش‌ها ممکن است در نواحی بدون منبع، بدون دیورژانس نباشند و به همراه خطای قابل توجهی حاصل شوند. با توجه به معادلات ماکسول، میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی در نواحی بدون منبع بدون دیورژانس هستند. اما معمولاً در روند تحلیل مسائل الکترومغناطیس بصورت عددی، جواب‌های بدست آمده در نواحی بدون منبع بدون دیورژانس نیستند. این محدودیت ریشه در ماهیت تقریبی بودن روش‌های عددی دارد.

به منظور برطرف نمودن این مشکل دسته جدیدی از توابع پایه شعاعی، معرفی و توابع پایه شعاعی برداری نامیده شده‌اند (Yang et al, 2014). در پژوهش مذکور یک روش بدون مش جدید که با توابع پایه شعاعی برداری همراه شده‌است؛ برای تحلیل مسائل الکترومغناطیس حوزه زمان پیشنهاد شده‌است. در نهایت نیز اثبات شده‌است که توابع پایه شعاعی اسکالر در یک ناحیه بدون منبع ممکن است بدون دیورژانس باقی نمانند؛ اما این مسئله در مورد توابع پایه شعاعی برداری صادق نیست. از این رو روش بدون مش برداری را می‌توان روشی کارآمد در تحلیل مسائل الکترومغناطیس حوزه زمان دانست که علاوه بر دارا بودن محاسن روش بدون مش متداول از دقت بالاتری نیز برخوردار است.

در تحلیل عددی معادلات ماکسول در حوزه زمان مفهوم پایداری از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در حالت کلی چنانچه پاسخ بدست آمده از تحلیل معادلات ماکسول به ازای یک ورودی محدود، خروجی محدودی داشته باشد پاسخ پایدار در نظر گرفته می‌شود و در غیر این صورت پاسخ ناپایدار خواهد بود. در این مقاله روش بدون مش برداری با روابط صریح جدیدی فرمول نویسی می‌شود. بکارگیری این روابط در روش بدون مش برداری پیشنهادی، باعث می‌شود که زمان رسیدن به مرز ناپایداری در روش بدون مش برداری افزایش یابد. به این ترتیب پاسخ‌های حاصل از روش پیشنهادی نه تنها مانند روش بدون مش برداری متداول به دلیل بدون دیورژانس بودن از دقت بالاتری برخوردار هستند بلکه پس از گذشت مدت زمان طولانی‌تری نیز به مرز ناپایداری می‌رسند.

در این مقاله ابتدا به معرفی اجمالی روش بدون مش برداری می‌پردازیم. سپس روابط صریح روش پیشنهادی را بدست می‌آوریم. در انتها نیز با ذکر مثال عددی ویژگی و صحت روش پیشنهادی را بررسی می‌کنیم.

روش تحقیق

با توجه به این که روابط روش پیشنهادی با استفاده از روابط روش بدون مش برداری (Yang et al, 2014) حاصل می‌شود ابتدا به نحوه بدست آوردن تابع پایه برداری اسکالر و تابع شکل برداری اشاره می‌کنیم و پس از آن روابط روش پیشنهادی خود را ارائه می‌دهیم.



روش بدون مش برداری

در این بخش به اختصار به روابط روش بدون مش برداری می پردازیم. تابع شکل برداری Φ در روش بدون مش برداری بر مبنای توابع پایه برداری Ψ که در مراجع (Lowitzsch, 2002) و (Lowitzsch, 2005) پیشنهاد شده است بصورت زیر حاصل می-شوند:

$$\Psi_j = (-\Delta I + \nabla \nabla^T) \phi_j \quad (1)$$

$$\Phi = \mathbf{B}_v \mathbf{A}_v^{-1} \mathbf{u}_s \quad (2)$$

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^N \Phi_j \mathbf{u}_j \quad (3)$$

در این روابط \mathbf{B}_v شامل توابع پایه برداری شعاعی و \mathbf{u} تابع مجهول است. \mathbf{u}_s ، \mathbf{u}_j و \mathbf{A}_v نیز به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\mathbf{u}_s = [\dots \ u_{jx} \ u_{jy} \ u_{jz} \ \dots] \quad (4)$$

$$\mathbf{u}_j = [u_{jx} \ u_{jy} \ u_{jz}]^T \quad (5)$$

$$\mathbf{A}_v = \begin{bmatrix} \Psi(\|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_1\|) & \Psi(\|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2\|) & \dots & \Psi(\|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_N\|) \\ \Psi(\|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1\|) & \Psi(\|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_2\|) & \dots & \Psi(\|\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_N\|) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Psi(\|\mathbf{R}_N - \mathbf{R}_1\|) & \Psi(\|\mathbf{R}_N - \mathbf{R}_2\|) & \dots & \Psi(\|\mathbf{R}_N - \mathbf{R}_N\|) \end{bmatrix}_{3N \times 3N} \quad (6)$$

حال میدان های الکتریکی و مغناطیسی براساس توابع شکل برداری به شکل زیر تقریب زده می شوند:

$$\mathbf{E} = \sum_j^{NE} \Phi_j \mathbf{E}_j \quad (7)$$

$$\mathbf{H} = \sum_j^{NH} \Phi_j \mathbf{H}_j \quad (8)$$

در صورتی که معادلات ماکسول را در یک محیط همگن، خطی، همه سو یکسان و بدون حضور منبع در نظر بگیریم و از روابط (۷) و (۸) برای بیان بردارهای میدان های الکتریکی و مغناطیسی استفاده کنیم؛ در نهایت پس از انجام پاره های از محاسبات جبری، روابط روش بدون مش برداری حوزه زمان به شکل زیر بدست می آیند:

$$\mathbf{H}_i^{n+1/2} = \mathbf{H}_i^{n-1/2} - \frac{\Delta t}{\mu} \sum_j^{NE} \nabla \times \Phi_j \mathbf{E}_j^n \quad (9)$$

$$\mathbf{E}_i^{n+1} = \mathbf{E}_i^n + \frac{\Delta t}{\epsilon} \sum_j^{NH} \nabla \times \Phi_j \mathbf{H}_j^{n+1/2} \quad (10)$$

یافته ها

در روش بدون مش برداری همانطور که در معادلات (۹) و (۱۰) نشان داده شده است میدان های الکتریکی و مغناطیسی در لحظه حال با استفاده از میدان های بدست آمده در زمان های گذشته محاسبه می شوند. در این بخش به منظور بدست آوردن روابط روش پیشنهادی، ابتدا معادلات (۹) و (۱۰) را با توجه به روابط پیشنهادی در مرجع (Cooke et al, 2007) بصورت ضمنی بدست می آوریم. پس از آن با تبدیل روابط ضمنی به صریح، روابط روش پیشنهادی خود را که به بهبود پایداری روش بدون مش برداری منجر می شود ارائه خواهیم کرد.



روابط روش بدون مش برداری پیشنهادی

یکی از نکات حائز اهمیت در مورد روش بدون مش برداری این است که میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی هر دو بصورت برداری مورد تحلیل قرار می‌گیرند. بنابراین برای بدست آوردن روابط روش پیشنهادی نیز باید معادلات برداری ماکسول را مورد تحلیل قرار داد. به این منظور ابتدا روابط به روز رسانی بردارهای میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی را با توجه به روابط پیشنهادی در مرجع (Cooke et al, 2007) بدست آورده‌ایم و سپس روابط (۷) و (۸) را در رابطه برداری جایگزین کرده‌ایم. به عنوان نمونه رابطه حاصل برای بردار میدان الکتریکی بصورت رابطه (۱۱) است:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i^{n+1/2} - \frac{\Delta t^2}{4\mu\epsilon} \sum_j^{NE} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{a}_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{a}_y + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{a}_z \right) \bullet \Phi_j \mathbf{E}_j^{n+1/2} = \mathbf{E}_i^{n-1/2} \\ - \frac{\Delta t^2}{4\mu\epsilon} \sum_j^{NE} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{a}_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{a}_y + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{a}_z \right) \bullet \Phi_j \mathbf{E}_j^{n-1/2} \\ + \frac{\Delta t}{\epsilon} \sum_j^{NH} \nabla \times \Phi_j \mathbf{H}_j^n \end{aligned} \quad (11)$$

حال با در نظر گرفتن تقریب (۱۲)، رابطه ضمنی حاصل به رابطه‌ای صریح تبدیل خواهد شد:

$$\mathbf{E}^n = \frac{\mathbf{E}^{n+1/2} + \mathbf{E}^{n-1/2}}{2} \quad (12)$$

$\mathbf{E}^{n+1/2}$ را براساس رابطه (۱۲) به شکل رابطه (۱۳) بدست می‌آوریم:

$$\mathbf{E}^{n+1/2} = 2\mathbf{E}^n - \mathbf{E}^{n-1/2} \quad (13)$$

با جایگذاری رابطه (۱۳) در رابطه ضمنی (۱۱) رابطه صریح پیشنهادی برای بردار میدان الکتریکی به شکل رابطه (۱۴) بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i^{n+1/2} = \mathbf{E}_i^{n-1/2} - \frac{\Delta t^2}{2\mu\epsilon} \sum_j^{NE} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{a}_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{a}_y + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{a}_z \right) \bullet \Phi_j \mathbf{E}_j^{n-1/2} \\ + \frac{\Delta t^2}{2\mu\epsilon} \sum_j^{NE} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{a}_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{a}_y + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{a}_z \right) \bullet \Phi_j \mathbf{E}_j^n \\ + \frac{\Delta t}{\epsilon} \sum_j^{NH} \nabla \times \Phi_j \mathbf{H}_j^n \end{aligned} \quad (14)$$

به طریق مشابه رابطه صریح پیشنهادی برای بردار میدان مغناطیسی مطابق با رابطه (۱۵) بدست می‌آید:

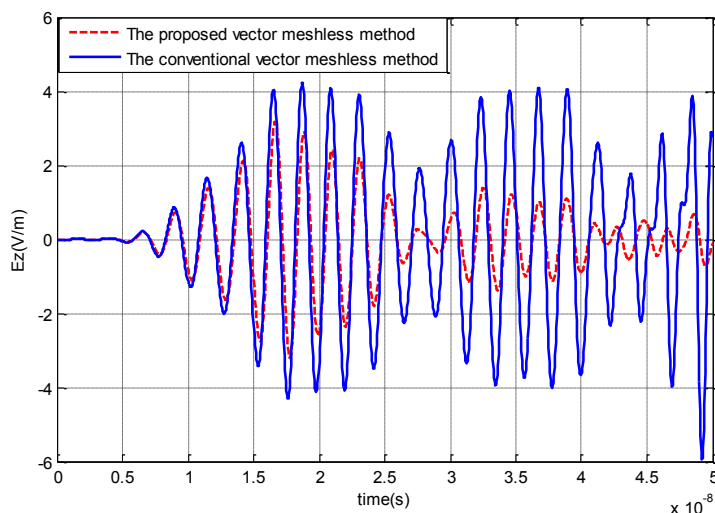
$$\begin{aligned} \mathbf{H}_i^{n+1} = \mathbf{H}_i^n + \frac{\Delta t^2}{2\mu\epsilon} \sum_j^{NH} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{a}_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{a}_y + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{a}_z \right) \bullet \Phi_j \mathbf{H}_j^{n+1/2} \\ - \frac{\Delta t^2}{2\mu\epsilon} \sum_j^{NH} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} \hat{a}_x + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \hat{a}_y + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \hat{a}_z \right) \bullet \Phi_j \mathbf{H}_j^n \\ - \frac{\Delta t}{\mu} \sum_j^{NE} \nabla \times \Phi_j \mathbf{E}_j^{n+1/2}. \end{aligned} \quad (15)$$

شبيه سازی یک مسئله نمونه با استفاده از روش پیشنهادی

در این قسمت یک محفظه تشدید دو بعدی با دیواره‌های هادی کامل الکتریکی و به ابعاد $1.0 \text{ m} \times 1.0 \text{ m}$ را در نظر می‌گیریم. چگالی جریان تحریک را بصورت پالس گوسی و با رابطه‌ای به فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$J = A \cos(2\pi ft) \exp\left(-\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right)^2\right) \hat{a}_z \quad (16)$$

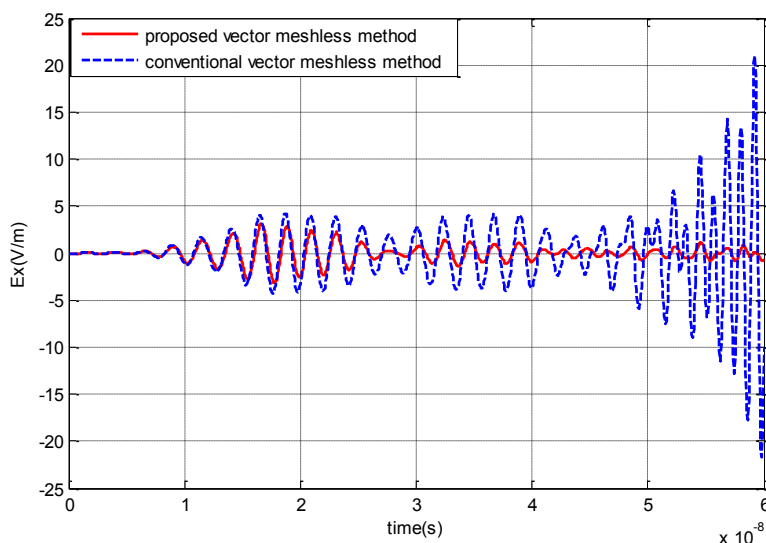
در رابطه (۱۶) داریم: $t_0 = 12 \times 10^{-9} \text{ s}$ ، $\tau = 4 \times 10^{-9} \text{ s}$ ، $f = 0.4 \times 10^9 \text{ Hz}$.
برای بررسی پایداری روش ارائه شده ابتدا شبيه سازی را با روش بدون مش برداری انجام داده‌ایم. در زمان $t = 50$ نانو ثانیه می‌توان مشاهده کرد که در شبيه سازی با روش بدون مش برداری پاسخ حاصل پایدار خواهد بود. در صورتی که شبيه سازی را با استفاده از روش بدون مش برداری پیشنهادی انجام دهیم می‌توان در شکل (۱) مشاهده کرد که پاسخ‌ها بر یکدیگر منطبق بوده و هر دو پاسخ پایدار هستند.



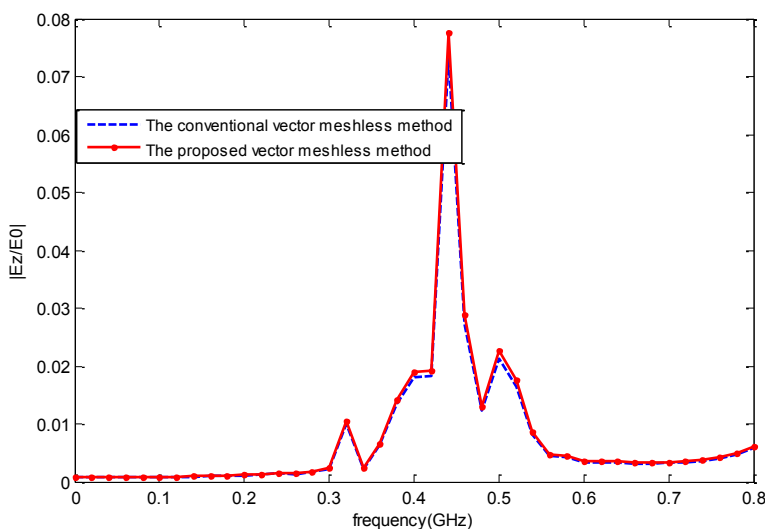
شکل (۱) تغییرات زمانی پاسخ روش بدون مش برداری متداول و روش بدون مش برداری پیشنهادی در زمان $t = 50$ نانو ثانیه در نقطه مشاهده

سپس زمان شبيه سازی را تا $t = 60$ نانو ثانیه افزایش می‌دهیم. در این حالت همانطور که در شکل (۲) نشان داده شده است می‌توان مشاهده کرد که پاسخ حاصل از روش بدون مش برداری متداول پس از گذشت زمان $t = 50$ نانو ثانیه رفته رفته واگرا می‌شود؛ در صورتی که پاسخ حاصل از روش بدون مش پیشنهادی همچنان پایدار باقی مانده است. به این ترتیب می‌توان اثر بکارگیری الگوریتم صریح پیشنهادی را در بهبود پایداری به خوبی مشاهده کرد.

با توجه به این که در روش بدون مش بکار برده شده، تحلیل در حوزه زمان انجام می‌شود با محاسبه تبدیل فوریه پاسخ زمانی می‌توان فرکانس رزونانس ساختار را بدست آورد. در شکل (۳) فرکانس رزونانس بدست آمده با استفاده از روش بدون مش برداری و روش پیشنهادی با یکدیگر مقایسه شده است. با توجه به این شکل می‌توان مشاهده کرد که پاسخ حاصل از روش پیشنهادی از دقتی مشابه با روش بدون مش برداری متداول برخوردار است.



شکل (۲) تغییرات زمانی پاسخ روش بدون مش برداری متداول و روش بدون مش برداری پیشنهادی در زمان $t = 60$ نانوثانیه در نقطه مشاهده



شکل (۳) پاسخ فرکانسی روش بدون مش برداری متداول و روش بدون مش برداری پیشنهادی در تحلیل محفظه تشدید

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله روابط روش بدون مش برداری را با استفاده از روابط صریح جدیدی بدست آورده‌ایم. بکارگیری این روابط می‌تواند باعث بهبود پایداری روش بدون مش برداری متداول شود. علاوه بر این با استفاده از این روش دقت نتایج بدست آمده مشابه با روش بدون مش برداری بوده و بهبود پایداری در این روش خللی در دقت نتایج ایجاد نمی‌کند. ویژگی و صحت روابط روش پیشنهادی در این مقاله با ذکر مثال عددی مورد بررسی قرار گرفته‌است.

در این مقاله به منظور بدست آوردن توابع پایه برداری از تابع پایه شعاعی اسکالر گوسی استفاده شده‌است. با توجه به وجود چندین نوع تابع پایه شعاعی اسکالر می‌توان روابط روش پیشنهادی را با بکارگیری انواع دیگری از توابع پایه شعاعی اسکالر



پیاده سازی کرد. سپس با مقایسه نتایج حاصل از بکارگیری هر تابع پایه شعاعی اسکالر دقت و پایداری نتایج را مورد مقایسه و بررسی قرار داد.

- منابع:

- Cingoski, V., Miyamoto, N., & Yamashita, H. (1998). Element-free Galerkin method for electromagnetic field computations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 34(5), 3236-3239.
- Viana, S. A., & Mesquita, R. C. (1999). Moving least square reproducing kernel method for electromagnetic field computation. *IEEE transactions on magnetics*, 35(3), 1372-1375.
- Kaufmann, T., Fumeaux, C., & Vahldieck, R. (2008, June). The meshless radial point interpolation method for time-domain electromagnetics. In *Microwave Symposium Digest, 2008 IEEE MTT-S International* (pp. 61-64). IEEE.
- Lai, S. J., Wang, B. Z., & Duan, Y. (2008). Meshless radial basis function method for transient electromagnetic computations. *IEEE Transactions on Magnetics*, 44(10), 2288-2295.
- Yang, S., Chen, Z., Yu, Y., & Ponomarenko, S. (2014). A divergence-free meshless method based on the vector basis function for transient electromagnetic analysis. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 62(7), 1409-1416.
- Lowitzsch, S. (2005). Matrix-valued radial basis functions: stability estimates and applications. *Advances in Computational Mathematics*, 23(3), 299-315.
- Lowitzsch, S. (2005). A density theorem for matrix-valued radial basis functions. *Numerical Algorithms*, 39(1-3), 253-256.
- Lowitzsch, S. (2002). *APPROXIMATION AND INTERPOLATION EMPLOYING DIVERGENCE-FREE RADIAL BASIS FUNCTIONS WITH APPLICATIONS* (Doctoral dissertation, Texas A&M University).
- Cooke, S. J., Botton, M., Antonsen, T. M., & Levush, B. (2009). A leapfrog formulation of the 3-D ADI-FDTD algorithm. *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*, 22(2), 187-200.