



۱۳۵۹

دانشگاه علوم دریایی امام خمینی

(ره) - نوشهر

دانشکده مهندسی الکترونیک و

مخابرات دریایی

## چهارمین کنفرانس الکترومغناطیس

مهندسی ایران

(کام ۱۳۹۵)

فروردین ماه ۱۳۹۵



# ارائه یک روش بدون مش با پایداری غیرمشروط برای حل مسائل سه بعدی الکترومغناطیس حوزه زمان

نفیسه خاکزار\*، دکتر عباسعلی حیدری، دکتر مسعود موحدی

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه یزد، یزد، ایران

\*رایانامه نویسنده مسئول: [n.khakzar@stu.yazd.ac.ir](mailto:n.khakzar@stu.yazd.ac.ir)

دیدگاه جدید برای حل مسائل الکترومغناطیس پیچیده با هندسه‌های نامنظم پیشنهاد می‌شوند. برخلاف روش‌های عددی مرسوم، روش‌های بدون مش، برای گسترش و استخراج معادلات جبری نیاز به مش‌های از پیش تعیین شده یا شبکه‌ای از آن نخواهند داشت. در عوض، برای تعیین و نمایش مسأله از دستگاهی متشکل از گره‌های پراکنده روی مرزهای فضای حل، استفاده می‌کنند [۱]. از جمله فواید روش بدون مش می‌توان به موارد ذیل اشاره کرد: مدل‌سازی مناسب مرزهای دلخواه، قابلیت حل‌های چند مقیاسی و قابلیت حل وفقی با اضافه یا حذف کردن گره‌ها در طول شبیه‌سازی [۲].

تاکنون روش‌های بدون مش در دو حوزه فرکانس و زمان برای حل مسائل الکترومغناطیسی به کار رفته‌اند [۳-۵]. یکی از اصلی‌ترین معضلات روش بدون

چکیده: در این مقاله، یک روش بدون مش با پایداری بی‌قید و شرط برای حل مسائل الکترومغناطیس سه‌بعدی ارائه شده است. برخلاف روش LOD دو بعدی، روش پیشنهادی دارای دقت مرتبه دوم در حوزه زمان است. علاوه بر این، خطای پاشیدگی این روش نسبت به روش ADI کمتر است؛ همین امر باعث می‌شود تا نتایج حاصل از روش پیشنهادی از دقت بالاتری برخوردار باشند. اثبات پایداری بی‌قید و شرط روش پیشنهادی و هم‌چنین دقت آن، به کمک نتایج شبیه‌سازی انجام شده است.

**کلیدواژه:** پایداری بی‌قید و شرط، روش‌های بدون مش، مدل‌سازی حوزه زمان، LOD

### ۱- مقدمه

اخیراً، روش‌های بدون مش<sup>۱</sup> در حیطه الکترومغناطیس محاسباتی مورد توجه قرار گرفته است و به عنوان یک

<sup>۱</sup> Mesh less methods

در معادله (۱)،  $r_n$  تابع پایه شعاعی<sup>۴</sup>،  $P_m$  تابع چندجمله‌ای و  $a_n$  و  $b_n$  ضرایب بسط هستند. در این جا از تابع پایه گاوسی<sup>۵</sup> که یکی از انواع توابع پایه شعاعی است، به فرم زیر استفاده شده است:

$$r_n(X) = e^{-c|r/r_{\max}|^2} \quad (2)$$

که  $r = \sqrt{(x-x_n)^2 + (y-y_n)^2}$  و  $r_{\max}$  حداکثر فاصله بین گره مورد نظر تا نقاط دیگر موجود در ناحیه پوشش است. با اعمال معادله (۱) بر تمامی گره‌های ناحیه پوشش، دستگاه معادلاتی تشکیل می‌شود که با حل آن، ضرایب مجهول  $a_n$  و  $b_n$  محاسبه می‌شوند. حال روش بدون مش به معادلات ماکسول اعمال می‌گردد. برای انجام این مرحله، نیاز است تا ابتدا گره‌های میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی در دامنه مسأله مشخص شوند. ماهیت میدان‌های الکتریکی و میدان‌های مغناطیسی به گونه‌ای است که به یکدیگر تزویج شده‌اند. بنابراین چیدمان گره‌های مدل کننده، به این ترتیب انتخاب می‌شود که هر گره میدان الکتریکی توسط گره‌های میدان مغناطیسی احاطه شده و در مقابل هر گره میدان مغناطیسی نیز، با گره‌های میدان الکتریکی در بر گرفته شده باشد.

#### ب- پایداری در روش‌های بدون مش

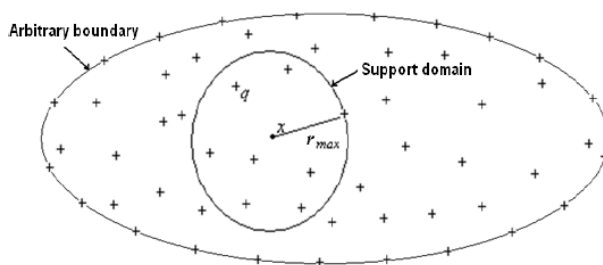
مشابه با روش تفاضل محدود، در روش بدون مش، در صورت جایگزین کردن مشتق زمانی با تفاضل مرکزی محدود، الگوریتم حاصل، به صورت مشروط پایدار خواهد بود. در بیشتر مطالعاتی که در این زمینه انجام

مش در حوزه زمان، پایداری مشروط است. برای حذف شرط پایداری و همچنین بهبود بازده محاسباتی در روش‌های بدون مش، چندین روش پیشنهاد شده است [۶-۸]. در این مقاله، سعی شده تا با به کارگیری تکنیک<sup>۱</sup> LOD پنج مرحله‌ای، روش جدیدی برای حل معادلات الکترومغناطیسی سه بعدی، ارائه شود.

## ۲- روش بدون مش

### ا- پیاده سازی روش‌های بدون مش

در روش بدون مش، دامنه مسأله و مرزهای آن با استفاده از گره‌های پراکنده شده در دامنه و مرز مسأله مشخص می‌شوند.



شکل ۱: گره‌های میدان در روش بدون مش

همان‌طور که در شکل ۱ مشاهده می‌شود، توزیع گره‌ها یکنواخت نیست. به این گره‌ها، گره‌های میدان<sup>۲</sup> گفته می‌شود. در مرحله بعد، تابع مجهول مورد نظر با استفاده از گره‌های واقع در یک ناحیه پوشش<sup>۳</sup> درون‌یابی می‌شود. در صورتی که متغیر میدان را با  $u$  نشان دهیم، در هر نقطه  $X$  خواهیم داشت:

$$u(X) = \sum_{n=1}^N r_n(X)a_n + \sum_{m=1}^M P_m(X)b_m \quad (1)$$

<sup>1</sup> Locally one-dimensional

<sup>2</sup> Field nodes

<sup>3</sup> Support domain

<sup>4</sup> Radial basis function

<sup>5</sup> Gaussian basis function

شده [۹]، معیار پایداری بر اساس کمترین فاصله بین گره‌های درون دامنه به این صورت در نظر گرفته شده است:

$$\Delta t \leq d_{\min} \sqrt{\mu \varepsilon} \quad (۳)$$

اگرچه شرط مذکور، تضمین کننده پایداری است اما زمانی که فاصله بین گره‌ها بسیار کم باشد، زمان شبیه‌سازی را افزایش داده و باعث ناکارآمدی روش بدون مش خواهد شد. در راستای تحقق پایداری، شرط دیگری جایگزین شرط (۳) می‌شود. در شرط اخیر، مقادیر ویژه ماتریس رشد<sup>۱</sup> مسأله مورد بررسی، تعیین کننده معیار پایداری خواهد بود.

$$\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{G}\mathbf{X}^n \quad (۴)$$

در رابطه (۴)،  $\mathbf{X}^n$  و  $\mathbf{X}^{n+1}$  بردار میدان‌ها در لحظه  $n$  و  $n+1$  هستند. با انجام یک سری محاسبات جبری، محدودیت زیر برای بزرگترین گام زمانی ممکن، حاصل می‌شود:

$$\Delta t \leq \frac{2}{\text{sqrt}(|\lambda_{\max}(\mathbf{Q})|)} \quad (۵)$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{C}\mathbf{B} + \mathbf{D}\mathbf{A} \quad (۶)$$

$\lambda_{\max}(\mathbf{Q})$  نشان دهنده بزرگترین مقدار ویژه ماتریس  $\mathbf{Q}$  است. هم‌چنین ماتریس‌های  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  و  $\mathbf{D}$  ماتریس‌های ضرایب به دست آمده در روند فرموله کردن مسأله با روش RPIM هستند. اساساً هنگام به‌کارگیری روش‌های عددی، چنانچه ابعاد مسأله بسیار کوچکتر از طول موج مورد استفاده باشد، به دلیل محدودیت در انتخاب گام زمانی، زمان شبیه‌سازی بسیار طولانی خواهد شد. بنابراین انگیزه اصلی برای یافتن

تکنیک‌های غیرمشروط، کاهش دادن زمان شبیه‌سازی است.

### ۳- روش بدون مش پیشنهادی

۱- فرمول نویسی

در یک محیط خطی، بدون اتلاف<sup>۲</sup> و ایزوتروپیک<sup>۳</sup> با ضریب گذردهی الکتریکی  $\varepsilon$  و ضریب نفوذ پذیری نسبی  $\mu$  می‌توان معادلات ماکسول سه‌بعدی حوزه زمان را به فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \left[\frac{\mathbf{A}}{2}\right] \mathbf{U} + \left[\frac{\mathbf{B}}{2}\right] \mathbf{U} + [\mathbf{C}] \mathbf{U} + \left[\frac{\mathbf{B}}{2}\right] \mathbf{U} + \left[\frac{\mathbf{A}}{2}\right] \mathbf{U} \quad (۷)$$

که  $\mathbf{U} = [E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z]^T$  مؤلفه‌های میدان‌ها را نمایش می‌دهد و  $[\mathbf{A}]$ ،  $[\mathbf{B}]$  و  $[\mathbf{C}]$  ماتریس‌های تنک<sup>۴</sup> هستند که المان‌های آن‌ها به ترتیب مشتق‌های مکانی در راستای  $x$ ،  $y$  و  $z$  هستند. با اعمال روند CN<sup>۵</sup> [۱۰] به معادله (۷) خواهیم داشت:

$$\frac{\mathbf{U}^{n+1}}{\mathbf{U}^n} = \frac{[\mathbf{I}] + \frac{\Delta t}{2} \left( \left[\frac{\mathbf{A}}{2}\right] + \left[\frac{\mathbf{B}}{2}\right] + [\mathbf{C}] + \left[\frac{\mathbf{B}}{2}\right] + \left[\frac{\mathbf{A}}{2}\right] \right)}{[\mathbf{I}] - \frac{\Delta t}{2} \left( \left[\frac{\mathbf{A}}{2}\right] + \left[\frac{\mathbf{B}}{2}\right] + [\mathbf{C}] + \left[\frac{\mathbf{B}}{2}\right] + \left[\frac{\mathbf{A}}{2}\right] \right)} \quad (۸)$$

معادله (۸) را می‌توان در پنج مرحله بازنویسی کرد:

$$\left([\mathbf{I}] - \frac{\Delta t}{4} [\mathbf{A}]\right) \mathbf{U}^{n+1/4} = \left([\mathbf{I}] + \frac{\Delta t}{4} [\mathbf{A}]\right) \mathbf{U}^n \quad (۹)$$

$$\left([\mathbf{I}] - \frac{\Delta t}{4} [\mathbf{B}]\right) \mathbf{U}^{n+2/4} = \left([\mathbf{I}] + \frac{\Delta t}{4} [\mathbf{B}]\right) \mathbf{U}^{n+1/4} \quad (۱۰)$$

$$\left([\mathbf{I}] - \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{C}]\right) \mathbf{U}^{n+3/4} = \left([\mathbf{I}] + \frac{\Delta t}{2} [\mathbf{C}]\right) \mathbf{U}^{n+2/4} \quad (۱۱)$$

$$\left([\mathbf{I}] - \frac{\Delta t}{4} [\mathbf{B}]\right) \mathbf{U}^{n+4/4} = \left([\mathbf{I}] + \frac{\Delta t}{4} [\mathbf{B}]\right) \mathbf{U}^{n+3/4} \quad (۱۲)$$

$$\left([\mathbf{I}] - \frac{\Delta t}{4} [\mathbf{A}]\right) \mathbf{U}^{n+1} = \left([\mathbf{I}] + \frac{\Delta t}{4} [\mathbf{A}]\right) \mathbf{U}^{n+4/4} \quad (۱۳)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، در معادله (۹) و (۱۳) معادلات راستای  $x$  حل شده و در معادله (۱۰) و (۱۲)

<sup>۲</sup> Lossless

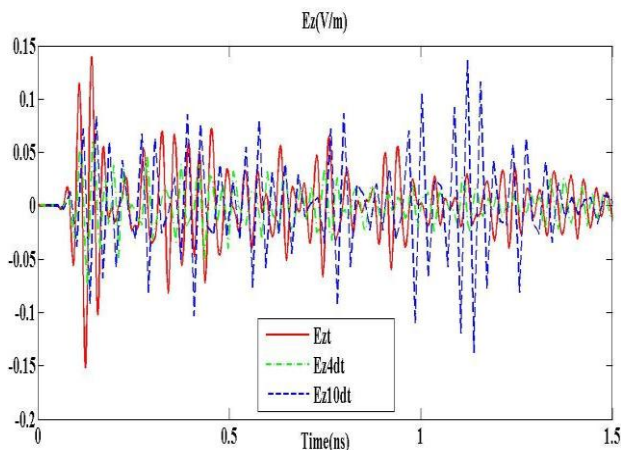
<sup>۳</sup> Isotropic

<sup>۴</sup> Sparse matrices

<sup>۵</sup> Crank-Nicolson

<sup>۱</sup> Gain matrix

سینوسی مدوله شده، در مرکز محفظه، تحریک شده است و موج مورد بررسی به صورت  $TM_z$  در نظر گرفته شده است. در این مسأله از یک توزیع گرهی یکنواخت ( $11 \times 11 \times 11$ ) استفاده شده است.



شکل ۲: تغییرات میدان در نقطه مشاهده (گره ۱۱۹۴) به ازای افزایش گام زمانی در روش پیشنهادی.

همان طور که در شکل ۲ مشاهده می شود، روش پیشنهادی با افزایش گام زمانی حتی تا ده برابر گام زمانی شرط (۳)، پاسخ پایداری را نتیجه می دهد. البته باید توجه داشت که همواره عوامل دیگری مانند خطای پراکندگی باعث محدود شدن گام زمانی می شوند. در مبحث پایداری بی قید و شرط، هدف اثبات عدم وابستگی گام زمانی به گام مکانی است که در روش پیشنهادی این هدف محقق شده است.

استفاده از روش  $ADI^2$  در مقایسه با روش بدون مش با پایداری مشروط، نرخ محاسبات را در حدود ۸۵٪ کاهش می دهد اما در عوض کمی از دقت محاسبات می کاهد [۷]. با مقایسه نتایج روش پیشنهادی و روش  $ADI$  در جدول ۱ می توان ادعا کرد که در روش

نیز معادلات راستای  $y$  و در نهایت در معادله (۱۱) معادله راستای  $z$  حل شده است. با استفاده از روند ذکر شده در پیوست مرجع [۱۱] به راحتی می توان اثبات کرد که الگوریتم پیشنهادی دارای دقت مرتبه دوم در حوزه زمان است.

در مرحله بعد، با استفاده از مفهوم توابع شکل<sup>۱</sup> می توان معادلات را برای یک زیرگام زمانی به صورت زیر استخراج کرد:

$$E_{x,i}^{n+\frac{1}{6}} = E_{x,i}^n \quad (14)$$

$$E_{y,i}^{n+\frac{1}{6}} - \frac{(\Delta t)^2}{16\epsilon\mu} \left( \sum_j \partial_x \phi_j \left( \sum_k \partial_x \phi_k E_{y,k}^{n+\frac{1}{6}} \right) \right) = E_{y,i}^n \quad (15)$$

$$+ \frac{(\Delta t)^2}{16\epsilon\mu} \left( \sum_j \partial_x \phi_j \left( \sum_k \partial_x \phi_k E_{y,k}^n \right) \right) - \frac{\Delta t}{2\epsilon} \sum_j \partial_x \phi_j H_{z,j}^n$$

$$E_{z,i}^{n+\frac{1}{6}} - \frac{(\Delta t)^2}{16\epsilon\mu} \left( \sum_j \partial_x \phi_j \left( \sum_k \partial_x \phi_k E_{z,k}^{n+\frac{1}{6}} \right) \right) = E_{z,i}^n \quad (16)$$

$$+ \frac{(\Delta t)^2}{16\epsilon\mu} \left( \sum_j \partial_x \phi_j \left( \sum_k \partial_x \phi_k E_{z,k}^n \right) \right) + \frac{\Delta t}{2\epsilon} \sum_j \partial_x \phi_j H_{y,j}^n$$

$$H_{x,i}^{n+\frac{1}{6}} = H_{x,i}^n \quad (17)$$

$$H_{y,i}^{n+\frac{1}{6}} - \frac{\Delta t}{4\mu} \left( \sum_j \partial_x \phi_j E_{z,j}^{n+\frac{1}{6}} \right) = H_{y,i}^n + \frac{\Delta t}{4\mu} \left( \sum_j \partial_x \phi_j E_{z,j}^n \right) \quad (18)$$

$$H_{z,i}^{n+\frac{1}{6}} + \frac{\Delta t}{4\mu} \left( \sum_j \partial_x \phi_j E_{y,j}^{n+\frac{1}{6}} \right) = H_{z,i}^n - \frac{\Delta t}{4\mu} \left( \sum_j \partial_x \phi_j E_{y,j}^n \right) \quad (19)$$

در این معادلات،  $\phi$  نشان دهنده توابع شکل است. به همین ترتیب معادلات سایر زیرگام های زمانی قابل محاسبه هستند.

#### ب- نتایج شبیه سازی

در این بخش، روش پیشنهادی بر روی یک محفظه تشدید سه بعدی اعمال شده است تا کارایی آن مشخص شود. ابعاد محفظه تشدید  $1\text{cm} \times 1\text{cm} \times 1\text{cm}$  است و توسط یک پالس گاوسی که به صورت

<sup>2</sup> Alternating direction implicit

<sup>1</sup> Shape functions

- [2] Y. Yu and Z. Chen, "Implementation of material interface conditions in the radial point interpolation meshless method," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 59, pp. 2916-2923, 2011.
- [3] V. Cingoski, N. Miyamoto, and H. Yamashita, "Element-free Galerkin method for electromagnetic field computations," *Magnetics, IEEE Transactions on*, vol. 34, pp. 3236-3239, 1998.
- [4] S. A. Viana and R. C. Mesquita, "Moving least square reproducing kernel method for electromagnetic field computation," *IEEE transactions on magnetics*, vol. 35, pp. 1372-1375, 1999.
- [5] J. Wang and G. Liu, "A point interpolation meshless method based on radial basis functions," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 54, pp. 1623-1648, 2002.
- [6] X. Chen, Z. Chen, Y. Yu, and D. Su, "An unconditionally stable radial point interpolation meshless method with Laguerre polynomials," *Antennas and Propagation, IEEE Transactions on*, vol. 59, pp. 3756-3763, 2011.
- [7] Y. Yu and Z. Chen, "Towards the development of an unconditionally stable time-domain meshless method," *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, vol. 58, pp. 578-586, 2010.
- [8] Y. Yu and Z. D. Chen, "Towards the development of unconditionally stable time-domain meshless numerical methods," in *Microwave Symposium Digest, 2009. MTT'09. IEEE MTT-S International*, 2009, pp. 309-312.
- [9] Y. Yu and Z. Chen, "A 3-D radial point interpolation method for meshless time-domain modeling," *Microwave Theory and Techniques, IEEE Transactions on*, vol. 57, pp. 2015-2020, 2009.
- [10] G. Sun and C. Trueman, "Unconditionally stable Crank-Nicolson scheme for solving two-dimensional Maxwell's equations," *Electronics Letters*, vol. 39, pp. 595-597, 2003.
- [11] J. Lee and B. Fornberg, "A split step approach for the 3-D Maxwell's equations," *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 158, pp. 485-505, 9/15/ 2003.

پیشنهادی با افزایش گام زمانی تا  $8*dt$ ، دقت نتایج بهبود یافته است.

جدول ۱: تغییرات فرکانس قطع محاسبه شده ساختار با تغییر گام زمانی.

روش محاسبه	اندازه گام زمانی	فرکانس محاسبه شده (GHz) $TM_{110}$	خطای نسبی (%)
روش پیشنهادی (LOD5-) (RPIM)	dt	22.36	5.47
	4*dt	21.8	2.8
	8*dt	21.4	0.9
ADI-RPIM	dt	22.36	5.47
	4*dt	23.08	8.8
	8*dt	23.18	9.3
روش تحلیلی	-	21.2	-

#### ۴- نتیجه گیری

یکی از اصلی ترین معضلات روش بدون مش در حوزه زمان، پایداری مشروط است. در این مقاله یک روش بدون مش با پایداری بی قید و شرط برای حل مسائل الکترومغناطیسی سه بعدی در حوزه زمان، پیشنهاد شده است. با ارزیابی نتایج شبیه سازی، می توان ادعا کرد که دقت روش پیشنهادی نسبت به روش ADI بهبود یافته است.

#### مراجع

- [1] G. Liu and Y. Gu, "An introduction to meshfree methods and their programming. 2005," *Springer Berlin. MEMS, NANO and Smart Systems*, vol. 10, pp. 403-408.