

## ارائه یک روش بدون مش کارآمد با استفاده از تابع شکل جدید برای مسایل الکترومغناطیس

هومن رزمجو، مسعود موحدی و احمد حکیمی

دانشگاه شهید باهنر کرمان، دانشکده فنی و مهندسی، بخش مهندسی برق

E-mail: h.razmjoo@gmail.com; Movahhedi@ieee.org; Hakimi@mail.uk.ac.ir

چکیده - برخلاف قابلیت‌های زیادی که روش المان محدود دارد، مش بندی دوباره دامنه مسئله به منظور بهبود مش و افزایش دقت، کار مشکل و زمان‌بری است. در چنین مواردی، به کار گرفتن روش‌های بدون مش بسیار مطلوب به نظر می‌رسد. اما این دسته از روش‌ها نسبتاً زمان‌بر بوده و همین مسئله کارایی آنها را محدود نموده است. از جمله زمان‌برترین مرحله پیاده‌سازی روش‌های بدون مش، ایجاد تابع شکل است. در این مقاله بر اساس ویژگی‌های اساسی که هر تابع شکل می‌بایست داشته باشد، تابعی مستقیم به عنوان تابع شکل معرفی می‌گردد. روش جدید نیاز به هیچگونه تابع پایه یا تابع وزن‌دهی نداشته و سریعتر از روش‌های متداول بدون مش قابل اجرا است. از دیگر مزایای روش پیشنهادی، فرمدهی مورد نظر روی تابع شکل است. روش پیشنهادی، در حل چند مسئله الکتروستاتیک پیچیده محک زده شده و نتایج، با یکی از روش‌های معتبر و متداول بدون مش مقایسه می‌شود و کارایی آن در حالت‌های مختلف مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

کلیدواژه- تابع شکل، روش بدون مش، روش‌های عددی، معادله پواسن.

[۵]. عدم نیاز به مش‌بندی دامنه‌ی محاسباتی خصوصیت اصلی این روش‌هاست. به طور کلی، در روش‌های بدون مش، همانند روش المان محدود، برای بدست آوردن میدان‌ها در محدوده‌ی بین گره‌ها از یک تابع تقریب استفاده می‌شود. به این منظور از تعدادی توابع پایه برای تخمین میدان در بین گره‌ها، بر اساس مقادیر دقیق گره‌ها، کمک گرفته می‌شود تا در نهایت تابع شکل<sup>۳</sup> تولید گردد. برای تولید توابع شکل، تکنیک‌های مختلفی وجود دارد که در حالت کلی به سه گروه اصلی تقسیم بندی می‌شوند: RPIM<sup>۲</sup>، MLS<sup>۵</sup>، PPIM<sup>۳</sup>. هر کدام از این روش‌ها از توابع پایه<sup>۷</sup> خاصی استفاده می‌کنند؛ به عنوان مثال در روش RPIM، توابع پایه شعاعی نظیر MQ<sup>۸</sup>، تابع گوسی، TPS<sup>۹</sup> و تابع لگاریتمی به کار گرفته می‌شوند [۱۰]. با استفاده از این توابع پایه و دنبال نمودن یک روند مشخص در هر گروه، در نهایت توابع شکل تولید می‌گردند. این توابع، متناسب با نوع تابع پایه‌ی به کار گرفته شده، دارای خصوصیات خاصی هستند. از این مرحله به بعد، توابع شکل مورد استفاده قرار می‌گیرند و در فرآیندی مشابه روش المان محدود، معادله دیفرانسیل مربوطه در کل دامنه

### ۱. مقدمه

بسیاری از مسائل فیزیکی که با استفاده از معادلات دیفرانسیل بیان میشوند، به صورت تحلیلی قابل حل نبوده و برای حل آنها می‌بایست از روش‌های عددی کمک گرفت [۱]. اساساً در روش‌های عددی متداولی که مورد استفاده قرار می‌گیرند، قبل از هر کاری می‌بایست دامنه‌ی مسئله را مش بندی نمود. از جمله‌ی این روش‌ها می‌توان به روش المان محدود<sup>۱</sup> اشاره کرد که به دلیل داشتن تئوری قوی و پایداری زیاد آن در حل مسائل الکترومغناطیس، به طور گسترده از آن استفاده می‌شود [۲]. ایده اولیه این روش، جایگزینی یک تابع تقریب منطقه‌ای به جای تابع جواب اصلی در هر المان است. اما تقسیم بندی کل دامنه، به المان‌های به هم چسبیده، یک فرآیند پیچیده و زمان‌بر است. علاوه بر آن بعضی مسائل وجود دارند که تحلیل آنها به کمک روش المان محدود امکان پذیر نمی‌باشد. لذا در حل این‌گونه مسائل روش‌های بدون مش<sup>۲</sup> [۳]-[۴] می‌توانند کارایی بیشتری داشته باشند.

اخیراً روش‌های بدون مش گوناگونی در زمینه‌های مختلف از جمله محاسبات میدان‌های الکترومغناطیس ارائه شده است [۹]-

<sup>3</sup> Shape Function

<sup>4</sup> Radial Point Interpolation Method

<sup>5</sup> Moving Least Square

<sup>6</sup> Polynomial Point Interpolation Method

<sup>7</sup> Basis Function

<sup>8</sup> Multi-Quadric

<sup>9</sup> Thin Plate Spline

<sup>1</sup> Finite Element

<sup>2</sup> Mesh Free Methods

این تابع با مقادیر معلوم در محل گره‌ها، به تعداد مجهولات  $a_i$ ، معادله داشته و در نهایت می‌توانیم ضرایب مجهول  $a_i$  را به صورت زیر تعیین کنیم:

$$\mathbf{U}_s = \mathbf{P}_m \cdot \mathbf{a} \quad (2)$$

که

$$\mathbf{U}_s = \{u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_n\} \quad (3)$$

چون تعداد معادلات و مجهولات برابر هستند ( $m = n$ ) ماتریس  $\mathbf{P}_m$  یک ماتریس مربعی بوده و خواهیم داشت:

$$\mathbf{a} = \mathbf{P}_m^{-1} \cdot \mathbf{U}_s \quad (4)$$

با جایگزینی معادله (4) در معادله (1) خواهیم داشت:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{P}_m^{-1} \cdot \mathbf{U}_s = \sum_{i=1}^n u_i \cdot \phi_i = \boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{U}_s \quad (5)$$

در حالیکه  $\boldsymbol{\phi}$  بردار توابع شکل بوده و به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\boldsymbol{\phi}^T(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{P}_m^{-1} \quad (6)$$

توابع شکل تولید شده به این روش به دلیل اینکه تابع مجهول از میان تمامی گره‌ها می‌گذرد دارای خاصیت دلتای کرانوکر<sup>11</sup> می‌باشد یعنی:

$$\phi_i(\mathbf{x} = \mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (7)$$

همچنین برای این توابع خاصیت یگانگی مجموع<sup>12</sup> هم برقرار است یعنی:

$$\sum_{i=1}^m \phi_i(\mathbf{x}) = 1 \quad (8)$$

### ۱-۲-۲ MLS

از دیگر روش‌ها برای رسیدن به توابع شکل، استفاده از توابع وزن داده شده با کمترین مجموع مربعات خطا می‌باشد. در این روش معمولاً تعداد توابع پایه کمتر از تعداد گره‌ها انتخاب می‌شود ( $m \neq n$ ). طی روندی مشابه که در فرمول‌های (2) تا (4) بیان شد خواهیم داشت:

مسئله حل می‌شود. از آنجایی که در تمامی گروه‌های روش بدون مش، به دست آوردن توابع شکل، نیاز به محاسبه معکوس یک ماتریس دارد که منجر به حجم محاسبات زیاد به ویژه در مسائلی با دامنه بزرگ می‌شود؛ لذا این موضوع باعث کند شدن و در نهایت ناکارآمدی روش شده است.

روش پیشنهادی در این مقاله، دستیابی مستقیم به تابع شکل را فراهم آورده و بدون اینکه به ماهیت کلی روش خللی وارد کند از مرحله‌ی تولید تابع شکل میانبر زده می‌شود. ما در این مقاله، بدون اینکه نیازی به هیچگونه تابع پایه یا تابع وزن دهی<sup>1</sup> داشته باشیم، تابعی را معرفی می‌کنیم که تمامی ویژگی‌های ضروری برای تابع شکل بودن را دارا است و می‌توان از آن در روش بدون مش به طور مستقیم استفاده کرد. همچنین در اینجا ویژگی‌های منحصر به فرد این تابع تشریح شده و کارایی روش بدون مش بر پایه این تابع شکل جدید در مقایسه با نسخه‌های متداول مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

### ۲. روش‌های بدون مش متداول

در تمامی نسخه‌های روش‌های بدون مش، قبل از حل معادله دیفرانسیل مربوطه در دامنه‌ی مسئله، ابتدا تابع مجهول به وسیله توابع شکل در دامنه‌ی مسئله تقریب زده می‌شود. در این بخش روش‌های معتبر شناخته شده برای تولید توابع شکل را بررسی می‌کنیم.

#### ۱-۱-۱ PPIM

یکی از ایده‌های ساده و پرکاربرد در تولید توابع شکل، استفاده از چند جمله‌ای‌های پاسکال به عنوان توابع پایه است. همانطور که قبلاً اشاره شد در روش‌های بدون مش، دامنه‌ی مسئله به وسیله‌ی گره‌های ثابتی مشخص می‌شوند. تابع اسکالر  $u(\mathbf{x})$ ، تعریف شده در این محدوده را در نظر می‌گیریم. این تابع را در نقطه‌ی مشاهده‌ی  $\mathbf{x}$  می‌توانیم به صورت زیر تقریب بزنیم:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m P_i(\mathbf{x}) a_i = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{a} \quad (1)$$

که  $P_i(\mathbf{x})$  بیانگر چندجمله‌ای‌های پاسکال در مختصات  $\mathbf{x} = [x, y]$  است (در حالت دو بعدی). در این حالت تعداد ضرایب مجهول  $a_i$  برابر با تعداد گره‌هایی است که به وسیله آن‌ها دامنه‌ی مسئله را مشخص نموده‌ایم. بنابراین اگر فرض کنیم که مقدار تابع  $u(\mathbf{x})$  در محل گره‌ها مشخص باشد، با برابر قرار دادن

<sup>11</sup> Keronecker Delta Condition

<sup>12</sup> Partition of Unity

<sup>10</sup> Weighting Function

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n R_i(\mathbf{x})a_i + \sum_{j=1}^m P_j(\mathbf{x})b_j \quad (17)$$

جایی که  $R_i(\mathbf{x})$  بیانگر توابع پایه شعاعی و  $P_j(\mathbf{x})$  نشان دهنده توابع پایه پاسکال هستند. در این نسخه نیز طی روندی مشابه، توابع شکل تشکیل می‌شوند [۳].

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{U}_s = \sum_{i=1}^n \phi_i u_i \quad (18)$$

توابع شکل تعیین شده با این روش، هم خاصیت دلتای کرانکر و هم یگانگی را دارا هستند. توابع پایه شعاعی گوناگونی پیشنهاد شده و مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱۴]. به عنوان مثال تابع پایه شعاعی MQ-RBF به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$R_i(\mathbf{x}) = (|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^2 + (\alpha_c d_c)^2)^q \quad (19)$$

وقتی که  $d_c$  میانگین فاصله بین گره‌ها است [۳]. در اکثر توابع پایه، پارامترهای ثابتی وجود دارند که مقدار آن‌ها می‌بایست بر اساس ماهیت مسئله مورد نظر تعیین گردد تا روش بهینه شود. به عنوان مثال در MQ-RBF دو پارامتر  $\alpha_c$  و  $q$  وجود دارد. در حالت استاندارد  $q$  برابر با  $0.5$  انتخاب می‌شود.

### ۳. معرفی تابع شکل مستقیم

همانطور که در بخش‌های قبلی دیدیم، در نسخه‌های متداول روش‌های بدون مش، برای محاسبه‌ی تابع شکل، نیاز به محاسبه‌ی معکوس ماتریس است؛ و از آنجایی که محاسبه‌ی این معکوس عمده‌تاً یک فرآیند زمان‌بر می‌باشد، مخصوصاً اگر ابعاد ماتریس بزرگ باشد، لذا نسخه‌های متداول در عمل از نظر زمان محاسباتی کارایی زیادی ندارند.

در این قسمت، بر اساس شرایط لازم برای توابع شکل، تابعی به عنوان تابع شکل مستقیم<sup>۱۴</sup> معرفی می‌شود که در ایجاد آن احتیاجی به توابع پایه و عملیات زمان‌بر نبوده و این توابع شکل به طور مستقیم قابل دستیابی خواهند بود. همچنین با در نظر گرفتن چندین پارامتر قابل تغییر در این تابع و تنظیم درست آن‌ها می‌توان این تابع شکل را در شرایط مختلف با مسأله تطبیق داده و دقت روش را افزایش داد. خاصیت دلتای کرانکر، پیوستگی و یگانگی مجموع جزء شرایط ضروری برای توابع شکل هستند. تابع ارائه شده در زیر (رابطه (۲۰)) تمامی این شرایط را

$$\mathbf{U}_s = (\mathbf{P}_m)_{(n \times m)} \cdot \mathbf{a}_{(m \times 1)} \quad (9)$$

معادله (۹) را مطابق روش استاندارد کمترین مجموع مربعات خطا، با کمینه کردن خطای وزن داده شده زیر حل می‌کنیم:

$$J = \sum_{i=1}^n \hat{W}_i [u(\mathbf{x}_i) - \tilde{u}(\mathbf{x}_i)]^2 \quad (10)$$

که  $\hat{W}_i$  ها توابع وزن‌دهی متناسب با نقطه  $i$ ام بوده و مقدار تابع در  $\mathbf{x}_i$  است. برای مینیمم کردن  $J$  می‌بایست:

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 0 \quad (11)$$

که منجر به رابطه خطی زیر بین ماتریس  $\hat{\mathbf{W}}$  و ماتریس  $\mathbf{a}$  می‌شود.

$$\mathbf{P}_m^T \hat{\mathbf{W}} \mathbf{P}_m \mathbf{a} = \mathbf{P}_m^T \hat{\mathbf{W}} \mathbf{U}_s \quad (12)$$

در حالیکه  $\hat{\mathbf{W}}$  ماتریس قطری است که از توابع وزن دهی به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$\hat{\mathbf{W}} = \text{diag}(\hat{W}_1 \quad \hat{W}_2 \quad \dots \quad \hat{W}_n) \quad (13)$$

با حل معادله (۱۲) بردار  $\mathbf{a}$  بدست می‌آید:

$$\mathbf{a} = \underbrace{(\mathbf{P}_m^T \hat{\mathbf{W}} \mathbf{P}_m)^{-1}}_{\mathbf{A}^{-1}} \underbrace{(\mathbf{P}_m^T \hat{\mathbf{W}})}_{\mathbf{B}} \mathbf{U}_s \quad (14)$$

با جایگزینی رابطه (۱۴) در رابطه (۱) خواهیم داشت:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{a} = \mathbf{P}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{U}_s = \boldsymbol{\phi}^T \mathbf{U}_s \quad (15)$$

که بردار توابع شکل برابر خواهند بود با:

$$\boldsymbol{\phi}^T = \mathbf{P}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} = \{\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_n\} \quad (16)$$

توابع شکلی که به این روش به دست می‌آیند دارای خاصیت دلتای کرانکر نمی‌باشند، بنابراین برای ارضای شرایط مرزی دریکه می‌بایست از تکنیک‌های خاصی کمک گرفت [۱۱].

### ۳-۱- RPIM

برای غلبه بر مشکل تکینگی<sup>۱۳</sup> ماتریس جواب در روش RPIM، توابع پایه شعاعی پیشنهاد شده‌اند [۱۴] - [۱۲]. در این حالت

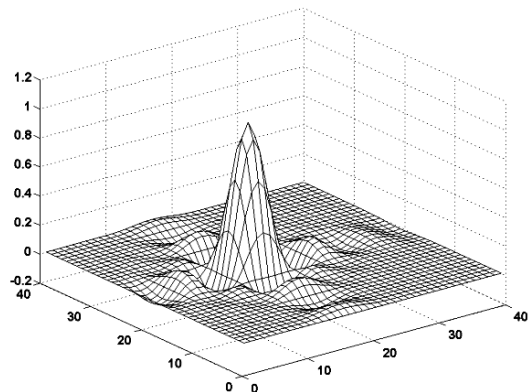
<sup>14</sup> Direct Shape Function

<sup>13</sup> Singularity

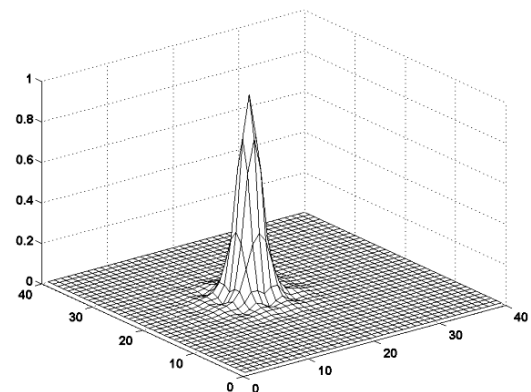
دارا بوده و علاوه بر آن‌ها یک قسمت کنترل پذیر نیز در آن تعبیه شده است.

$$\phi_i(\mathbf{x}) = \frac{\prod_{i=1}^n |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|}{N(\mathbf{x}) \cdot |\mathbf{x} - \mathbf{x}_i| \cdot (|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|^2 + R^2)} \times (1 + c_1 e^{-\alpha(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i| - d_1)}) \cdot (1 + c_2 e^{-\beta(|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i| - d_2)}) \quad (20)$$

$N(\mathbf{x})$  تابعی مکانی است و برای برقراری شرط یگانگی، مجموع آن را در طول شبیه‌سازی تعیین می‌نماییم [۱۵]. پارامتر  $R$  میزان پیوستگی تابع و همچنین عرض قله تابع شکل را تعیین می‌کند. قسمت‌های نمایی درون پرانتز، همان قسمت‌های کنترل پذیر تابع هستند که با تغییر پارامترهای آن می‌توان دقت روش را در شرایط مختلف بهبود داد [۱۵]. در شکل‌های (۱) و (۲) توابع شکل تولید شده با روش RPIM و تابع پیشنهادی نشان داده شده است. شکل (۱) نمایشگر یکی از توابع شکل تولید شده از روش RPIM برای یک مسئله مربعی دو بعدی که گره‌ها به طور یکنواخت ( $10 \times 10$ ) در آن پخش شده‌اند می‌باشد.



شکل ۱: تابع شکل از روش MQ-RPIM مربوط به یکی از نقاط میانی



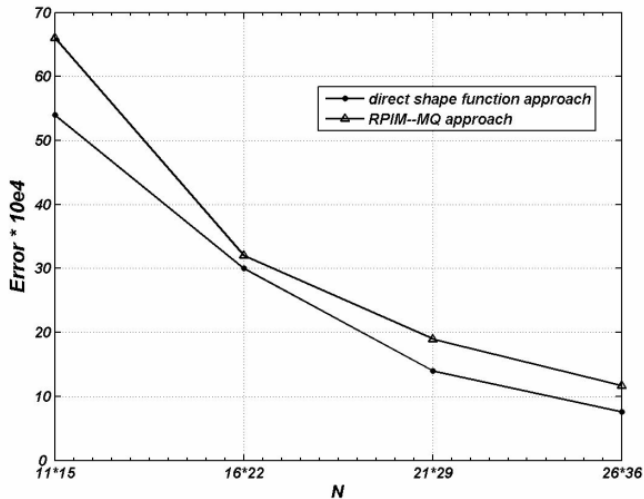
شکل ۲: تابع شکل مستقیم مربوط به یکی از نقاط میانی با پارامترهای  $c_1 = 150$ ,  $c_2 = 50$ ,  $\alpha = 3/d_c$ ,  $\beta = 1/d_c$

در این شکل از ( $40 \times 40$ ) نقطه برای محاسبه و نمایش تابع شکل کمک گرفته شده است. عرض قله و پیوستگی تابع شکل در این روش تقریباً ثابت بوده و قابلیت تغییر در شرایط مختلف را ندارد. این مسئله در مواقعی که گره‌ها دارای توزیع غیر یکنواخت باشند خطای روش را بالا می‌برد [۱۵]. در شکل (۲) تابع شکل مستقیم پیشنهادی نمایش داده شده است.

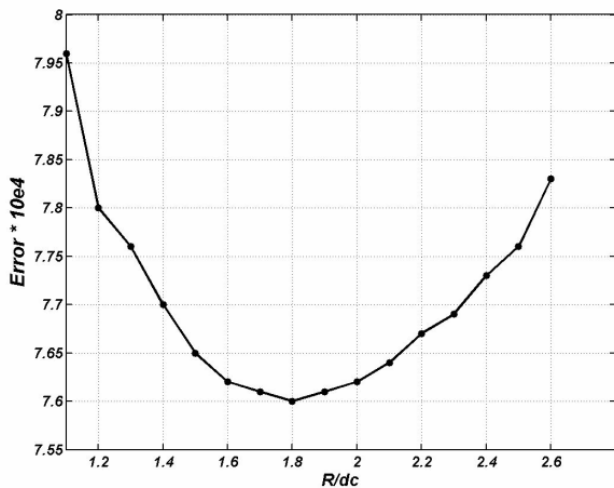
#### ۴. مثال‌های عددی

در این مقاله سعی شده با تحلیل چند ساختار پیچیده، کارآیی روش پیشنهادی مورد محک اساسی قرار بگیرد. در مثال اول کارکرد روش در یک ساختار با محیط غیر یکنواخت مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. در مثال دوم مسئله را در دستگاه مختصات قطبی حل می‌کنیم. این مسئله دامنه محاسباتی نسبتاً پیچیده ای دارد و در آن شرایط مرزی دریکله و نیومن می‌بایست ارضا شوند.

در [۱۵] ساختاری مورد بررسی قرار گرفته که دارای جواب تحلیلی است و نتایج بدست آمده از تحلیل ساختار با روش پیشنهادی با جواب دقیق مسئله مقایسه شده و خطای روش در آن مقاله محاسبه شده است. در این مقاله، برای بررسی کارآیی روش در شرایطی متفاوت با حضور محیط‌های مختلف، یک ساختار میکرواستریپ (شکل (۳)) را در نظر می‌گیریم و با فرض حضور میدان‌های الکتریکی ساکن در آن، توزیع پتانسیل برای ساختار را با روش پیشنهادی به دست می‌آوریم. متأسفانه برای تعیین توزیع پتانسیل در چنین ساختاری روش تحلیلی دقیقی وجود ندارد. بنابراین مقایسه روش با جواب دقیق امکان پذیر نمی‌باشد. به همین منظور، ساختار را با روش المان محدود که جزء روش‌های تأیید شده می‌باشد مورد تحلیل قرار داده و جواب بدست آمده از این روش را ملاک سنجش قرار می‌دهیم. برای اعمال روش بدون مش پیشنهادی یک توزیع یکنواخت ( $26 \times 36$ ) گره که در کل دامنه‌ی مسئله پخش شده‌اند را در نظر می‌گیریم. ولتاژ استریپ را برابر با ۱۰ ولت قرار داده و  $\epsilon_r = 10$  انتخاب می‌کنیم. شکل‌های (۴-الف) و (۴-ب) چگونگی توزیع پتانسیل در ساختار را، بعد از اعمال روش بدون مش با استفاده از تابع شکل پیشنهادی، نشان می‌دهند. دیده می‌شود که شرایط مرزی به درستی محقق گردیده و تغییرات سریع پتانسیل به خوبی دنبال شده است. برای تعیین خطا در این روش و مقایسه خطای آن با یکی از نسخه‌های متداول روش بدون مش (RPIM-MQ)، رابطه‌ی زیر را به عنوان تابع خطا در نظر می‌گیریم:



شکل ۵: دقت روش پیشنهادی در مقایسه با یکی از روش های متداول



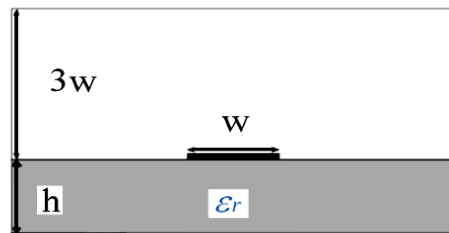
شکل ۶: تأثیر تغییرات پارامتر  $R$  تابع شکل مستقیم بر روی خطا

روش تابع شکل مستقیم و تابع شکل شعاعی (یکی از روش های متداول) به نمایش درآمده است. همان گونه که در این شکل دیده می شود، روش پیشنهادی دارای دقت بهتری است. همانطور که انتظار می رود دقت هر دو روش با زیاد شدن تعداد گره ها افزایش می یابد اما با زیاد شدن تعداد گره ها، چون برای بدست آوردن توابع شکل در روش تقریب شعاعی نیاز به محاسبه ی وارون ماتریسی با ابعاد  $(M \times M)$  است، زمان محاسباتی سریعاً افزایش می یابد؛ اما در روش پیشنهادی نیازی به محاسبه ی ماتریس معکوس نبوده و سرعت افزایش زمان محاسبات کمتر خواهد بود.

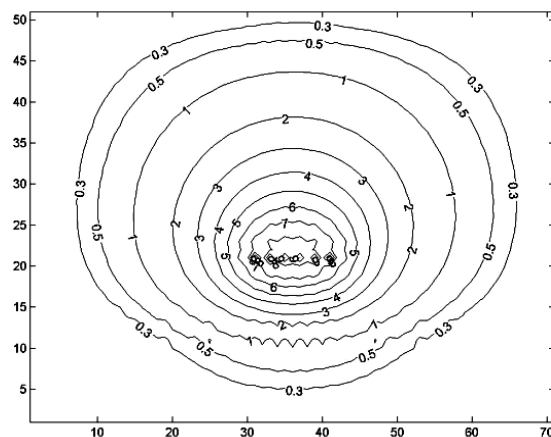
همانطور که ذکر شد تابع شکل پیشنهادی دارای تعدادی پارامتر است که انتخاب آن ها در دقت مسئله تأثیر گذار می باشد. در شکل (۶) تأثیر یکی از این پارامترها،  $R$ ، را روی دقت روش

$$Error = \frac{1}{M} \frac{\sum_{i=1}^M |v - \tilde{v}|}{\sum_{i=1}^M |v|} \quad (21)$$

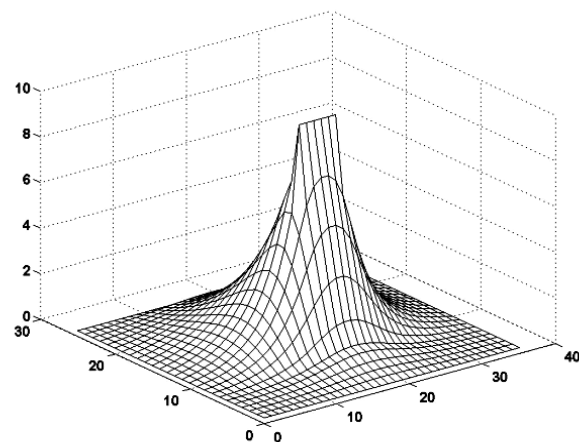
$M$  بیانگر تعداد کل گره ها در دامنه ی محاسباتی،  $\tilde{v}$  بیانگر حل عددی پتانسیل با روش های بدون مش و  $v$  بیانگر حل عددی پتانسیل به روش المان محدود به عنوان جواب مرجع است. در شکل (۵) نحوه تأثیر تعداد گره های انتخابی روی دقت مسئله با



شکل ۳: ساختار خط مایکرو استریپ



(الف)



(ب)

شکل ۴: (الف) خطوط هم پتانسیل. (ب) توزیع پتانسیل با فرض میدان های الکترو استاتیک

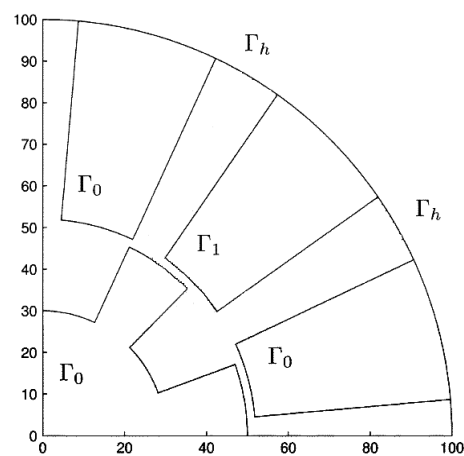
## ۵. نتیجه‌گیری

در این مقاله یک تابع شکل مستقیم برای روش بدون مش ارائه شده است. در نسخه‌های متداول روش بدون مش، تعیین تابع شکل طی یک فرآیند زمانبر و پیچیده صورت می‌گیرد که کارایی روش را تا حد زیادی تحت تأثیر خود قرار می‌دهد. اما تابع شکل ارائه شده در این مقاله بطور مستقیم قابل حصول بوده و دیگر نیازی به محاسبه‌ی ماتریس معکوس برای تعیین تابع شکل نخواهد بود. همچنین تابع معرفی شده دارای پارامترهایی است که می‌توان با تنظیم آن‌ها، در شرایط مختلف دقت روش را بهبود بخشید. نتایج عددی بدست آمده از تحلیل یک مسئله الکترواستاتیک با روش پیشنهادی و مقایسه‌ی آن با یکی از نسخه‌های قدیمی روش بدون مش (RPIM-MQ)، کارآمدی روش پیشنهادی را به نمایش گذاشته است.

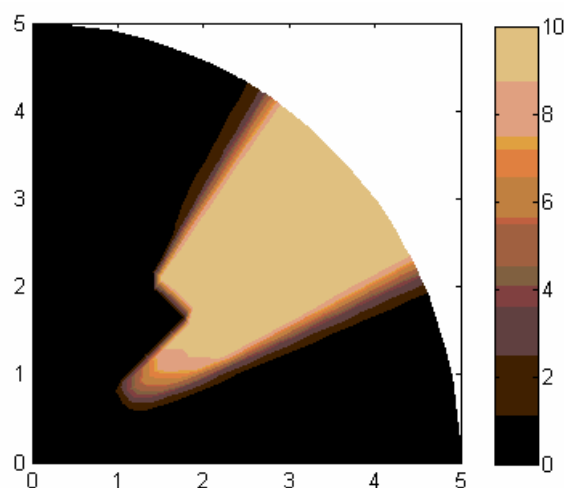
## مراجع

- [1] M. N. O. Sadiku, *Numerical Techniques in Electromagnetic*. CRC Press, 2001.
- [2] J.-M. Jin, *the Finite Element Method in Electromagnetics*. John-Wiley & Sons Ltd., 2002.
- [3] G. R. Liu and Y. T. Gu, *An Introduction to Meshfree Methods and Their Programming*. Springer: New York, 2005.
- [4] M. Griebel and M. A. Schweitzer, *Meshfree Method for Partial Differential Equation II*. Springer: New York, 2005.
- [5] G. GuimarFaes, R. R. Saldanha, R. C. Mesquita, D. A. Lowther, J. A. Ramirez, "A Meshless Method for Electromagnetics Field Computation Based on The Multi-Quadric Technique," *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 43, No. 4, pp. 1281-1284, 2007.
- [6] Y. Zhang, K. R. Shao, Y. Guo, J. Zhu, D. X. Xie, and J.D. Lavers, "An Improved Multi-Quadric Collocation Method for 3-D Electromagnetics Problem," *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 43, No. 4, pp. 1509-1512, 2007.
- [7] A. Manzin and O. Bottauscio, "Element-Free Galerkin Method for the Analysis of Electromagnetic-Wave Scattering," *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 44, No. 6, pp. 1366-1369, 2008.
- [8] S. J. Lai, B. Z. Wang, and Y. Duan, "Meshless Radial Basis Function Method for Transient Electromagnetic Computations," *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 44, No. 10, pp. 2288-2295, 2008.
- [9] S. L. Ho, S. Yang, J. M. Machado, and H. C. Wong, "Application of a Meshless Method in Electromagnetics," *IEEE Trans. on Magnetics*, Vol. 37, No. 5, pp 3198-3202, 2001.
- [10] X. Zhang, K. Z. Song, X. Liu, "Meshless Methods Based on Collocation With Radial Basis Functions," *Comput. Mech.*, Vol. 26, pp. 333-343, 2000.
- [11] S. Fernandez-Mendez and A. Huerta, "Imposing Essential Boundary Conditions in Mesh-free Methods," *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 193, pp. 1257-1275, 2004.
- [12] G. R. Liu and Y. T. Gu, "A Local Radial Point Interpolation Method (LR-PIM) for Free Vibration Analyses of 2-D Solids," *J. Sound and Vibration.*, Vol 246, No. 1, pp. 29-46, 2001.
- [13] J. G. Wang and G. R. Liu, "A Point Interpolation Meshless Method Based on Radial Basis Functions," *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 54, No. 11, pp. 1623-1648, 2002.
- [14] J.G. Wang and G.R. Liu, "On the Optimal Shape Parameters of Radial Basis Functions used for 2-D Meshless Methods," *Computer Method Appl. M.*, Vol. 191, No. 23-24, pp. 2611-2630, 2002.
- [15] H. Razmjoo, M. Movahhedi, and A. Hakimi, "An Efficient Meshless Method Based on a New Shape Function," To be appeared in the *International Journal of Numerical Modelling: Electronic Networks, Devices and Fields*.

مورد بررسی قرار داده‌ایم. به این منظور (۳۶×۲۶) گره با توزیع یکنواخت در دامنه‌ی مسئله در نظر گرفته، همچنین بقیه پارامترها برابر با پارامترهای شکل (۲) انتخاب شده‌اند. مشخص است که به ازای محدوده وسیعی از تغییرات این پارامتر (حدود دو برابر) کل تغییرات خطا حدود  $3 \times 10^{-6}$  است که تقریباً ناچیز و قابل صرف نظر است. بنابراین انتخاب دقیق  $R$  خیلی ضروری نبوده و بدست آوردن یک مقدار تقریبی برای آن کفایت می‌کند. مثال بعدی مربوط به توزیع پتانسیل در یک میکروموتور است. قطبی بودن دامنه محاسباتی شرایط مناسبی برای محک زدن روش در دستگاه مختصات استوانه‌ای می‌باشد. در این ساختار تغییرات شدید و ناموزون پتانسیل مشهود است. برای این منظور میکروموتور شکل (۷) را مورد تحلیل قرار می‌دهیم که دارای ۱۲ قطب در استاتور و ۸ قطب در روتور می‌باشد. در ناحیه  $\Gamma_0$ ، پتانسیل صفر و در  $\Gamma_1$ ، پتانسیل ۱۰ ولت لحاظ شده است و در  $\Gamma_h$  شرط مرزی نویمان برقرار می‌باشد. شکل ۸ جزئیات توزیع پتانسیل در این ساختار را نشان می‌دهد.



شکل ۷: ساختار میکروموتور



شکل ۸: توزیع پتانسیل در میکروموتور